Lineare Algebra
Vorlesungsaufzeichnung

Björn Gernert
www.bjoern-gernert.de
mail@bjoern-gernert.de

31.10.2008

1 Einführendes Beispeil

Gegeben seien zwei Geraden, die durch folgende Punkte gehen:

g_1: durch $(3, 0)$ und $(-4, 6)$
g_2: durch $(1, -1)$ und $(6, -4)$

Mögliche Geradengleichungen (vorgegeben):

g_1: $6x_1 + 7x_2 = 18$
g_2: $3x_1 + 5x_2 = -2$

Probe, ob die Punke auf der Geraden liegen:

Einsetzen in g_1:

$$6 * 3 + 7 * 0 = 18 \checkmark$$

$$6 * (-4) + 7 * 6 = 6 * 3 = 18 \checkmark$$

Einsetzen in g_2:

$$3 * 1 + 5 * (-1) = -2 \checkmark$$

$$3 * 6 + 5 * (-4) = -2 \checkmark$$

Anmerkung: Bitte keine 0 = 0 Beweise!

Schnittpunkte berchnen:

$$\begin{array}{rcl|l}
6x_1 + 7x_2 & = & 18 & \\
3x_1 + 5x_2 & = & -2 & \\
\hline
6x_1 + 7x_2 & = & 18 & \\
\frac{3}{2}x_2 & = & -11 & Z_2 - \frac{1}{2}Z_1 \\
\hline
\Rightarrow x_2 & = & -\frac{22}{3} & \\
\Rightarrow 6x_1 + 7 * (-\frac{22}{3}) & = & 18 & \\
\Rightarrow 6x_1 & = & \frac{54}{3} + \frac{154}{3} & \\
\Rightarrow 6x_1 & = & \frac{208}{3} & \\
\Rightarrow x_1 & = & \frac{104}{9} &
\end{array}$$

2 Gauß

Das gaußsche Eliminationsverfahren (oder auch Gauß-Verfahren), zum Lösen von linearen Gleichungssystemen, besteht aus zwei Schritten:

1. Stufenform herstellen durch Zeilenumformung
2. Rückwärtselimination

So kann die Lösungesmenge leicht abgelesen bzw. ermittelt werden.

Schnittpunkt: $\{S\} = \underbrace{g_1 \cap g_2;}_{\text{Durchschnittsmenge}} \qquad S = (\frac{104}{9}, -\frac{22}{3})$

Probe:

$$6 * \frac{104}{9} + 7 * (-\frac{22}{3}) = \frac{208 - 154}{3} = \frac{54}{3} = 18 \checkmark$$
$$3 * \frac{104}{9} + 5 * (-\frac{22}{3}) = \frac{104 - 110}{3} = -\frac{6}{3} = -2 \checkmark$$

Stufennormalform (von Gauß und Jordan):

$$\begin{array}{cc|c||l}
6 & 7 & 18 & \\
3 & 5 & -2 & \\
\hline
6 & 7 & 18 & Z_1 \\
0 & \frac{3}{2} & -11 & Z_2 - \frac{1}{2}Z_1 \\
\hline
1 & \frac{7}{6} & 3 & \frac{1}{6}Z_1 \\
0 & 1 & \frac{22}{3} & \frac{2}{3}Z_2 \\
\hline
1 & 0 & \frac{104}{9} & Z_1 - \frac{7}{6}Z_2 \\
0 & 1 & -\frac{22}{3} &
\end{array}$$

3 Lösen mit Matrixen

Die Gleichungen werden nun als Matrix aufgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = a_{1,1} * X_1 + a_{1,2} * X_2$$

$$b_2 = a_{2,1} * X_1 + a_{2,2} * X_2$$

Beispiel:

$$b_1 = 18; a_{1,1} = 6; a_{1,2} = 7$$

$$18 = 6 * X_1 + 7 * X_2$$

$$b_2 = -2; a_{2,1} = 3; a_{2,2} = 5$$

$$-2 = 3 * X_1 + 5 * X_2$$

$$\begin{aligned} b_i &= a_{i,1} * X_1 + a_{i,2} * X_2 \\ &= \textstyle\sum_{j=i}^{2} a_{i,j} * X_j \qquad\qquad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Problem: Gibt es eine (2x2)-Matrix $\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ mit:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \end{pmatrix} \ ?$$

Satz 1.1
Seien $a, i, j \in \mathbb{R}$ und $b, i \in \mathbb{R}$ mit $i, j = 1, 2$ und

$$d = a_{1,1} * a_{2,2} - a_{2,1} * a_{1,2} \neq 0$$

gegeben. Dann gibt es eindeutig bestimmte $X_i \in \mathbb{R}$ mit $i = 1, 2$ und

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{2,2}}{d} & -\frac{a_{1,2}}{d} \\ -\frac{a_{2,1}}{d} & \frac{a_{1,1}}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$d = a_{1,1} * a_{2,2} - a_{2,1} * a_{1,2} = 6 * 5 - 3 * 7 = 30 - 21 = 9 \neq 0$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{7}{9} \\ -\frac{3}{9} & \frac{6}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} * 18 + (-\frac{7}{9}) * (-2) \\ (-\frac{3}{9}) * 18 + \frac{6}{9} * (-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{90+14}{9} \\ \frac{-54-12}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{104}{9} \\ -\frac{22}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$